L'ipotesi del continuo
Testo per il video

Duccio Pianigiani
Department of Philosophy
University of Siena, Italy

Agosto 2009

A centocinquant'anni dalla sua formulazione, l'ipotesi del continuo rimane uno dei principali problemi matematici insoluti (qialcuno, come Feferman, insinuano che sia "intrinsecamente vago"). Per la sua importanza, David Hilbert lo pose al primo posto nella lista dei problemi aperti che comunicò al congresso dei matematici del 1900 a Parigi.

Nel celebre saggio *Cos'è il problema del continuo di Cantor?* (1947, 1964), Kurt Gödel riassumeva così i termini del problema:

> quanti punti ci sono nella retta dello spazio euclideo?

Questo presuppone che si siano chiariti alcuni concetti:

1. in che modo i numeri reali rappresentano la retta (il continuo).

2. il concetto stesso di numero reale.

3. il concetto di cardinalità e di cardinale transfinito.

Gran parte del lavoro di chiarimento fu svolto da Richard Dedekind e Georg Cantor alla fine dell'800: a Dedekind si deve anche la peculiare definizione di insieme infinito, come quell'insieme che può essere posto in corrispondenza biunivoca con un suo sottinsieme proprio (ad esempio l'insieme dei numeri naturali con l'insieme dei numeri pari, o dei quadrati ecc.); a Cantor ed Hausdorff principalmente lo sviluppo delle nozioni di cardinale ed ordinale transfinito.

Riguardo alle nozioni di ordinale e cardinale, si comprese in primo luogo che al livello del transfinito (ossia dell'infinito matematicamente dominabile, distinto dall'infinito assoluto) esse posseggono proprietà affatto diverse, rispetto al caso finito: di fatto solo alcuni ordinali saranno assunti a rappresentare cardinalità e per l'esattezza saranno i più piccoli ordinali di quella cardinalità. Hilbert era solito illustrare questo problema con l'esempio del

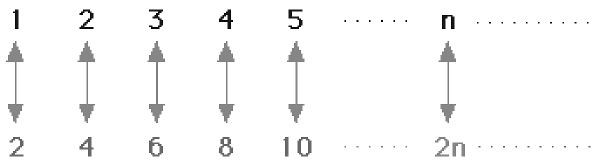

Figure 1: L'Hotel di Hilbert: se arrivano infiniti nuovi ospiti

celebre albergo con infinite stanze. Si immagini dunque un albergo con infinite stanze $0, 1, 2, 3...$, tutte occupate; nonostante ciò, un nuovo ospite può essere accolto semplicemente facendo scorrere ciascuno degli ospiti presenti di una stanza, cosicché l'ospite che occupa la stanza n-esima, si trasferisce nella $n+1$-esima ecc. In tal modo si libera la stanza numero 0 per il nuovo ospite: quella che si sfrutta, è la proprietà basilare degli insiemi infiniti, di essere biiettivi ad una loro parte propria: ad esempio tutti i numeri e il sottinsieme proprio dei numeri pari ; Fuor di metafora, l'esempio ammonta alla costruzione di una corrispondenza biunivoca fra l'ordinale transfinito limite $\omega = \{0, 1, 2, 3...\}$ e l'ordinale transfinito $\omega + 1 = \{0, 1, 2, 3...\omega\}$. Pertanto, in quanto equipotenti, questi due insiemi hanno la stessa cardinalità, benché solo il più piccolo di quella cardinalità, ossia ω, verrà considerato un cardinale. Denomineremo questo cardinale $\aleph_0$.

L'esperimento può essere in realtà ripetuto in caso arrivo di un numero finito arbitrario di nuovi ospiti, ma anche in caso di arrivo di una comitiva infinita (contabile) di nuovi ospiti, chiedendo all'ospite che occupa la stanza 1 di trasferirsi nella 2, a quello della 2, nella 4. . . a quello della n, nella $2n$. . . liberando in tal modo le infinite stanze di numero dispari, e poi se arrivano infiniti autobus, ciascuno con infiniti passeggeri ...). Di fatto possiamo generalizzare l'esempio dell'albergo di Hilbert mostrando come in ω stanze sia possibile collocare:

$$\omega^{\omega}, \omega^{\omega^{\omega}}, \omega^{\omega^{\omega^{\omega}}} .....\epsilon_0...ecc.$$

ospiti. Chiameremo $\aleph_1$ il più piccolo ordinale α tale che non è possibile collocare α ospiti in ω stanze.

Ma esistono veramente cardinali più grandi di $\aleph_0$? Nel 1873 Cantor dimostrò che la cardinalità dell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali è maggiore di quella dei numeri naturali, ossia di $\aleph_0$Si considerino i numeri reali tra 0 e 1. Si ricordi che un numero reale può essere rappresentato nella forma:

$$r = 0, a_0, a_1, a_2, a_3....$$

dove ciscun decimale è un numero compreso tra 0 e 9. Se r è razionale, allora per qualche n si ha che per ogni $m > n$, $a_m = 0$ oppure le cifre si ripetono in periodi uguali. Se viceversa r è irrazionale, tali cifre non sono $= 0$ da un certo

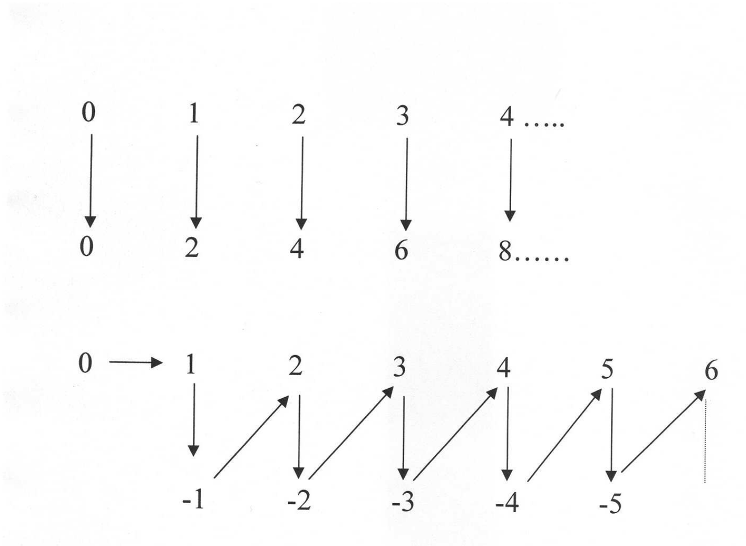

Figure 2: Corrispondenze biunivoche

punto in poi, né si ripetono periodicamente. Il numero 1 verrà rappresentato come $0,99999....$, cosí $\frac{1}{2}$ verrà scritto $0,49999.....$ Supponiamo per assurdo che vi sia una corrispondenza biunivoca tra numeri reali e numeri naturali, e che questa sia (la scelta è del tutto casuale) quella illustrata nelle figura 3. Osservando la figura 3, che illustra la famosa "prova diagonale" di Cantor (*"Über eine Eigenshaft des Inbegriffes alle Reellen algebreischen Zahlen" 1874*), se prendo la prima cifra decimale del primo numero, la seconda cifra decimale del secondo numero, la terza del terzo e cosí via, ottenendo dunque, nel caso specifico $1, 7, 6, 5, 8, 2...$ ecc. ho la cosiddetta *diagonale*. Adesso definisco un numero reale, ad arbitrio, ma comunque in modo tale che la prima cifra decimale sia diversa da 1, la seconda sia diversa da 7, la terza sia diversa da 6, la quarta diversa da 8 ecc. ottengo, premettendo "$0,$" , un numero reale che differisce di almeno una cifra da ciascuno di quelli enumerati nella figura 3 e dunque vi è almeno un numero reale diverso da tutti i numeri naturali.

Dunque la "potenza" del continuo, risulta maggiore di quella del numerabile.

Successivamente Cantor ipotizzò che non vi fosse alcun altro cardinale strettamente compreso fra quello dei numeri naturali, ossia $\aleph_0$ e quello dei numeri reali, che denomineremo $\mathbf{c}$:

> ogni insieme infinito di numeri reali, o è numerabile, oppure ha la potenza del continuo.

Quello che abbiamo prima verificato è che $\mathbf{c} \neq \aleph_0$, ovvero che vi sono almeno

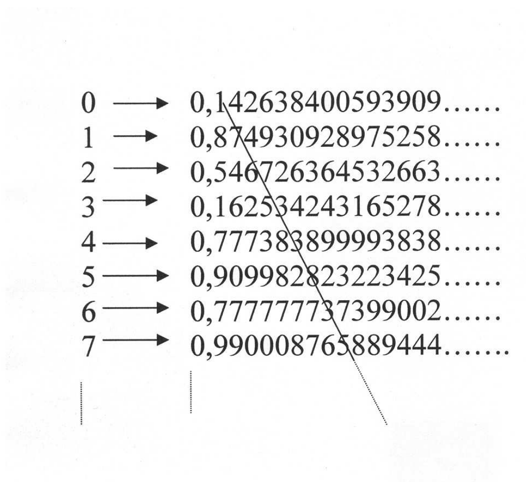

Figure 3: la "prova diagonale" di Cantor

due cardinali transfiniti. Con l'ausilio dell'assioma di scelta, sotto forma del principio di buon ordinamento, Cantor fu capace di definire l'intera scala degli *aleph*:

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < ... < \aleph_n < ... < \aleph_\omega < ... < \aleph_\alpha < ....$$

dove $\aleph_{\alpha+1}$ è il più piccolo cardinale maggiore di $\aleph_\alpha$ e se λ è un ordinale limite, allora $\aleph_\lambda$ è il più piccolo cardinale maggiore di tutti gli $\aleph_\alpha$, per $\alpha < \lambda$.

Cantor non riuscí a collocare esattamente $\mathbf{c}$ in questa scala. Se accettiamo l'assioma di scelta, da cui segue che la cardinalità di ogni insieme (segnatamente quello dei reali) è un *aleph*, allora (cfr. Gödel 1947,1964) il problema del continuo assume questa forma:

quale $\aleph_\alpha$ è il cardinale di $\mathbb{R}$?

Sappiamo che $\aleph_1$ è il più piccolo cardinale maggiore di $\aleph_0$ e dunque $\aleph_0 < \aleph_1 \leq \mathbf{c}$; ci chiediamo ora se vale addirittura $\mathbf{c} = \aleph_1$ e siccome Cantor riuscí a dimostrare che $\mathbf{c} = 2^{\aleph_0}$, se in definitiva $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$. L'ipotesi del continuo può dunque in definitiva essere presentata in questa forma:

$$(CH) \quad \aleph_1 = 2^{\aleph_0}$$

Nel 1908 Hausdorff dette la versione generalizzata:

$$(GCH) \quad \aleph_{\alpha+1} = 2^{\aleph_\alpha}$$

per ogni α. Nel 1938 Gödel dimostrò che (CH) è coerente con gli altri assiomi della teoria degli insiemi **ZFC**, sebbene egli si andasse successivamente convincendo della sua falsità, e nel 1970 produsse una dimostrazione

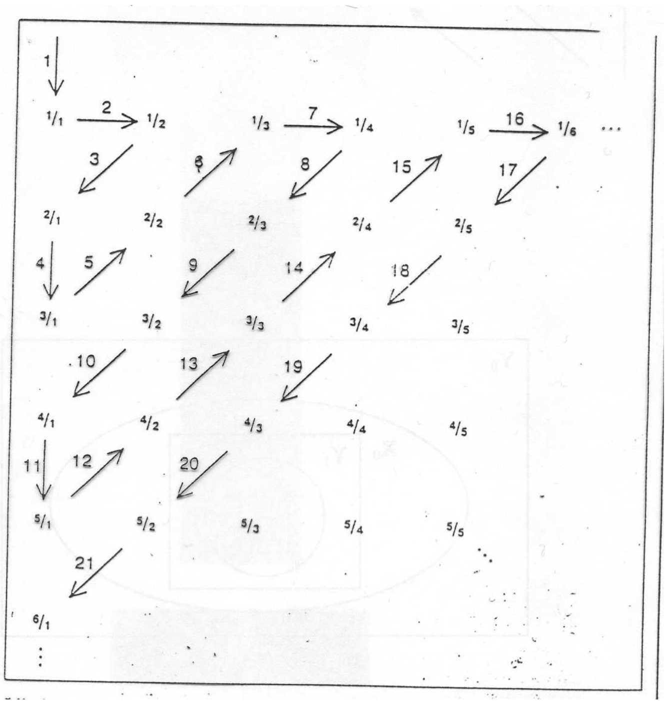

Figure 4: corrispondenza biunivoca tra razionali positivi e naturali

(che conteneva tuttavia un errore) di $\aleph_2 = 2^{\aleph_0}$; nel 1963 Cohen dimostrò che è indipendente da essi. Oggi sappiamo ad esempio che $\aleph_2 = 2^{\aleph_0}$ vale sotto certe condizioni, come l'assioma di massimo di Martin (cfr. Foreman, Magidor e Shelah, 1988). Ancora negli ultimi anni di vita Gödel scriveva:

> la potenza del continuo può non essere maggiore di $\aleph_2$, ma l'ipotesi generalizzata del continuo è decisamente falsa.